

**SUJET : Estimations microlocales de l'énergie pour des solutions d'équations d'évolution dispersives linéaires ou non linéaires.**

COORDONNÉES DU CO-DIRECTEUR DE THÈSE LOCAL : **Jean-Marc Delort, LAGA, Université Sorbonne Paris-Nord, Villetaneuse.**

Cette thèse, co-dirigée par Thomas Alazard (CNRS et ENS Paris-Saclay) et Jean-Marc Delort (Université Sorbonne Paris-Nord), vise à développer des méthodes microlocales pour démontrer des estimations d'énergie de solutions d'équations aux dérivées partielles dispersives linéaires ou non linéaires.

Les estimations d'énergie jouent un rôle central dans l'étude de nombreuses équations d'évolution. Ces méthodes ont été développées depuis près d'un siècle dans un cadre local, et à partir des années soixante pour ce qui est de leur version microlocale. Au cours des années récentes de nouvelles estimations locales de ce type, pour des problèmes linéaires ou non-linéaires, ont été découvertes. Le but général de la thèse sera d'explorer la version microlocale de ces récentes estimations, avec d'éventuelles applications à certaines équations non-linéaires. De manière plus précise, on considèrera les problèmes suivants :

- Systèmes d'équations hyperboliques linéaires
- Équations dispersives linéaires dont équation de Klein-Gordon
- Équations dispersives non linéaires et notamment l'équation d'Euler à surface libre.

#### PARTITION DE L'ÉNERGIE POUR DES ÉQUATIONS DISPERSIVES GÉNÉRALES.

La question de l'équipartition de l'énergie pour les solutions de l'équation des ondes linéaire s'est avérée être un outil essentiel dans le programme développé au cours des dix dernières années par Duyckaerts, Kenig et Merle pour l'étude de la conjecture de la résolution en solitons pour l'équation des ondes non-linéaire à énergie critique. Cette équipartition signifie que, pour une solution de l'équation des ondes linéaire en dimension impaire, la somme de l'énergie tronquée hors du cône d'onde à l'instant  $t$  et à l'instant  $-t$  converge, lorsque le temps  $t$  tend vers l'infini, vers l'énergie totale de la donnée initiale. Récemment, Delort a obtenu un résultat similaire pour l'équation des demi-ondes et pour l'équation de Schrödinger, dans un cadre microlocal. Ce dernier résultat semble susceptible de généralisation, dans un premier temps à l'équation de Klein-Gordon, ou plus généralement à des équations dispersives associées à un symbole radial. Dans un second temps, on pourra envisager d'étudier le même problème dans le cas de symboles non radiaux.

#### SYSTÈMES HYPERBOLIQUES.

L'étude des estimations d'énergie pour les systèmes hyperboliques de la forme

$$\partial_t u + \sum_{1 \leq j \leq d} A_j(x) \partial_{x_j} u = 0$$

remonte aux travaux de Jean Leray et Lars Gårding pour les systèmes symétriques (i.e. lorsque  $A_j = A_j^T$ ) et Peter Lax pour les systèmes symétrisables. Dans ce dernier cas, l'obtention des inégalités d'énergie repose sur l'utilisation d'un « symétriseur » qui est de manière classique une matrice d'opérateurs pseudo-différentiels à coefficients  $C^\infty$ . Récemment, Guy Métivier a montré comment

établir des estimations d'énergie pour des systèmes pour lesquels le symétriseur est une matrice d'opérateur pseudo-différentiels  $S(x, D_x)$  telle que  $\xi \mapsto S(x, \xi)$  est seulement Lipschitzien. Sa démonstration repose sur l'hypothèse que les matrices  $A_j$  sont  $C^2$  par rapport à la variable  $x$ . Une question naturelle est de chercher à étendre ce travail aux cas de matrices qui sont seulement  $C^1$ , en utilisant une variante des transformations en paquets d'onde utilisée par Guy Métivier. Cela constituerait un résultat optimal dans l'étude des estimations d'énergie pour les systèmes hyperboliques.

#### ESTIMATIONS DE MORAWETZ POUR L'ÉQUATION D'EULER À SURFACE LIBRE.

Également connues sous le nom d'estimations de décroissance de l'énergie locale, ces estimations ont été initialement introduites par Cathleen Morawetz pour l'équation de Klein-Gordon. Dans leur forme originale, elles affirment que, pour les solutions de l'équation linéaire, l'énergie locale des solutions est majorée, globalement en temps, par l'énergie initiale. Pour l'équation d'Euler à surface libre, de telles estimations de Morawetz ont été démontrées par Alazard, Ifrim et Tataru pour un fluide de dimension 2, en utilisant des propriétés spécifiques aux fonctions holomorphes. Le doctorant étudiera la généralisation de telles estimations au cas général d'un fluide en dimension quelconque, avec ou sans tension de surface.